

## ÉPREUVE N° 2

DURÉE : 2 heures — COEFFICIENT : 4

*Le candidat traitera obligatoirement le sujet correspondant à l'option formulée dans sa demande d'admission à concourir.*

*Il trouvera ces sujets aux pages suivantes du présent fascicule :*

- Page 3 – Mathématiques.
- Page 5 – Géographie économique.
- Page 5 – Droit commercial.
- Page 5 – Droit civil.
- Page 6 – Comptabilité commerciale.

**PREMIER SUJET**  
**MATHÉMATIQUES**

*L'usage de la calculatrice et du convertisseur est autorisé*

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur

*Les parties I et II sont indépendantes*

## I

Soit  $\mathcal{P}$  un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

A. Soit  $u$  la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$ .
2. On désigne par  $v$  et  $w$  les suites telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait :

$$v_n = u_{2n} \text{ et } w_n = u_{2n+1}.$$

- a. Démontrer que les suites  $v$  et  $w$  sont des suites arithmétiques.
- b. Calculer  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$  ( $n \geq 0$ ) et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

On désignera par  $\mathcal{G}$  l'ensemble des points  $A_n$  du plan  $\mathcal{P}$  de coordonnées  $(n; u_n)$  lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ .

B.1. On considère la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$g(x) = 2x + 1 - \frac{2}{\pi} \cotan(\pi x)$$

où  $\cotan$  désigne la fonction cotangente,  $\cotan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

- a. Déterminer l'ensemble de définition de  $g$  que l'on notera  $D_g$ .
- b. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on désigne par  $g_n$  la restriction de  $g$  à l'intervalle  $]n; n+1[$ .  
Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et pour tout  $x$  de  $]n; n+1[$ , on a :

$$g_n(x) = g_0(x-n) + 2n.$$

- c. Dresser le tableau de variations de  $g_0$  puis celui de  $g_n$ , pour  $n \geq 1$ .
- d. Démontrer que la fonction  $g_n$  est bijective,  $n \in \mathbb{N}$ .  
En déduire le nombre de solutions de l'équation  $g(x) = 0$  qui appartiennent à  $]n; n+1[$ .

2. On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{4} [1 - (2x + 1) \cos(\pi x)] \text{ sur } [0; +\infty[.$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan  $\mathcal{P}$ , (ne pas construire  $\mathcal{C}$  avant la question 2.f).

a. Démontrer que tout point de  $\mathcal{C}$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

b. Démontrer que pour tout réel  $x$  de  $[0; +\infty[$  non entier, on a :

$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \sin(\pi x) g(x).$$

c. En utilisant la question B.1., établir pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , le tableau de variations de  $f$  sur  $[n; n+1]$ . On distinguera les cas  $n$  pair et  $n$  impair et on ne cherchera pas à calculer l'extremum de  $f$  sur cet intervalle.

d. Démontrer que pour tout point  $A_n$  de  $\mathcal{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la tangente à  $\mathcal{C}$  est l'une des droites suivantes :

$$D \text{ d'équation } \left\langle y = -\frac{1}{2}x \right\rangle \text{ ou } D' \text{ d'équation } \left\langle y = \frac{x+1}{2} \right\rangle.$$

e. Démontrer que pour tout réel positif  $x$  on a l'inégalité :

$$-\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Qu'en déduire, quant à la position de la courbe  $\mathcal{C}$  ?

f. Tracer la partie de  $\mathcal{C}$  correspondant à  $x \in [0; 5]$ , les droites  $D$  et  $D'$  ainsi que les points  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  et  $A_5$ .

## II

Une urne contient une boule blanche et  $n$  boules rouges ( $n \geq 2$ ).

1.a. Calculer la probabilité  $P_1(n)$  de tirer une boule rouge dans un tirage d'une boule au hasard.

b. La suite définie par  $P_1(n)$  est-elle monotone ?

c. Quelle est la limite de  $P_1(n)$  quand  $n$  augmente indéfiniment ?

2.a. Calculer la probabilité  $P_2(n)$  de tirer deux boules rouges dans un tirage simultané de deux boules au hasard.

b. Étudier la suite définie par  $P_2(n)$  (sens de variation, limite).

3.a. Comparer  $P_1(n)$  et  $P_2(n)$ .

b. Déterminer l'ensemble des valeurs de  $n$  pour lesquelles on a :

$$P_1(n) - P_2(n) < \frac{1}{8}.$$